№4 – дәріс

Сызықты теңдеулер жүйесі және оларды шешу әдістері. Фундаменталды шешімдер жүйесі. Базистік және бос белгісіздер.

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі

Анықтама 1. n белгісізі бар m сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі деп мына түрде берілген жүйені айтамыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

мұндағы a_{ik}, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$ - жүйенің коэффициенттері , ал b_i, $i=\overline{1,m}$ - бос мүшелер, x_i , $i=\overline{1,n}$ - белгісіздер.

2. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сандары (1) жүйесінің шешімдері деп аталады, егер бұл сандарды теңдеудегі сәйкес белгісіздердің орнына қойғанда, осы жүйедегі тепе-теңдіктер орындалса.

3. (1) жүйесі үйлесімді деп аталады, егер оның тым болмағанда бір шешімі табылса, кері жағдайда жүйе үйлесімсіз деп аталады.

4. Үйлесімді (1) жүйесінің тек бір ғана шешімдері табылса, онда жүйе анықталған деп аталады, кері жағдайда жүйе анықталмаған деп аталады.

5. Егер $b_i = 0$, $i=\overline{1,m}$, онда (1) жүйесін біртектес теңдеулер жүйесі деп атаймыз.

1-ші лекциядағы айтылғандарды ескерсек, (1) жүйесін матрицалық түрде былай жазуға болады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Кронекер-Капелли теоремасы. (1) жүйесі үйлесімді болуы үшін $r(A) = r(\overline{A})$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- (2) жүйесінің кеңейтілген матрицасы деп аталады.

(1) теңдеулер жүйесінің әрбір теңдеуі осы теңдеудің коэффиценттерімен бірмәнді анықталатындықтан, $\overline{A}$ матрицасының

жолдарын вектордың координаталары ретінде қарастыра отырып, $r(\overline{A})$ - (1) жүйесінің сызықтық тәуелсіз теңдеулер санына тең болатындығына көз жеткіземіз .

Салдар 1. (1) жүйесі анықталған болады сонда және тек қана сонда ғана, егер $r(A)=r(\overline{A})=n$, мұндағы n - белгісіздер саны.

$m=n$ және $\det A=\Delta\neq 0$ жағдайын қарастыралық. Онда салдар 1 бойынша (1) жүйесі анықталған және осы теңдеулер жүйесін шешу үшін келесі әдістерді қарастырамыз.

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері.

1.Крамер ережесі. (1) жүйесінің шешімдері мынадай формула арқылы анықталады: $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i=\overline{1,n}$, мұндағы Δ_i, $i=\overline{1,n}$ - Δ анықтауыштағы i -ші бағанды бос мүшелер бағанымен алмастырғаннан пайда болған анықтауыштар.

2. Матрицалық әдіс. $\det A\neq 0$ болғандықтан (2) бойынша

$$AX=B\Rightarrow A^{-1}\cdot AX=A^{-1}B\Rightarrow EX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

3. Гаусс әдісі (белгісіздерді біртіндеп жою әдісі). Элементар түрлендірулерді қолданып (1) жүйесін өзіне эквивалентті болатын диагоналдық жүйеге келтіреміз

$$\begin{cases} a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\ldots+a'_{1,n-1}x_{n-1}+a'_{1,n}x_n=b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_1+\ldots+a'_{2,n-1}x_{n-1}+a'_{2,n}x_n=b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{n-1,n-1}x_{n-1}+a'_{n-1,n}x_n=b'_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a'_{n,n}x_n=b'_n \end{cases} \qquad (3)$$

одан кейін ең соңғы теңдеуден бастап біртіндеп жоғарылай отырып белгісіздерді анықтаймыз.

Мысал 1. Жоғарыда көрсетілген әдістерді қолданып, теңдеулер жүйесін шеш.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7 \\ x_1+4x_2+2x_3=-1 \\ x_1-4x_2\qquad\quad=-5 \end{cases} \qquad (4)$$

Шешуі.

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0,\quad r(A)=r(\overline{A})=3$$

Ендеше (4) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар.

1) *Крамер ережесі.* Δ_1, Δ_2, Δ_3 табамыз.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-7 & -3 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ -5 & -4 & 0\end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -7 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -5 & 0\end{vmatrix}=2,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & -7\\ 1 & 4 & -1\\ 1 & -4 & -5\end{vmatrix}=-4.$$

бұдан

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-2.$$

2) *Матрицалық әдіс.* (4) жүйесін $AX=B$ түрінде жазамыз, мұндағы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7\\ -1\\ -5\end{pmatrix}.\ A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & -4 & -10\\ 2 & -1 & -3\\ -8 & 5 & 11\end{pmatrix}.$$

Ендеше $X=A^{-1}B$ теңдігін қолданып X матрицасын табамыз:

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & -4 & -10\\ 2 & -1 & -3\\ -8 & 5 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\ -1\\ -5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

Бұдан $x_1=-1,\quad x_2=1,\quad x_3=-2.$

3) *Гаусс әдісі.* Бірінші және екінші теңдеулердің орнын ауыстырамыз

$$\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-3x_2+x_3=-7\\ x_1-4x_2\qquad=-5\end{cases}$$

Бірінші теңдеуді (–2)-ге көбейтіп, екінші теңдеуге қосамыз. Енді, бірінші теңдеуді (–1)-ге көбейтіп, үшінші жолға қосамыз. Сонымен, біз екінші және үшінші теңдеулердегі x_1 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3=-1\\ \quad -11x_2-3x_3=-5\\ \quad -8x_2-2x_3=-4\end{cases}$$

Екінші жолды $(-\frac{2}{11})$-ге көбейтіп, үшінші теңдеуге қосамыз. Сөйтіп, үшінші теңдеудегі x_2 белгісізін жойдық:

$$\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3=-1\\ \quad -11x_2-3x_3=-5\\ \qquad\qquad \frac{2}{11}x_3=-\frac{4}{11}\end{cases}$$

Енді төменнен жоғары қарай біртіндеп белгісіздерді табалық: үшінші теңдеуді шешіп $x_3=-2$, табылған $x_3=-2$ мәнін екінші теңдеуге қойып, шешсек $x_2=1$. Табылған $x_3=-2,\ x_2=1$ мәндерін бірінші теңдеуге қойсақ, $x_1=-1$ болады.

Жалпы шешім туралы ұғым

Жалпы жағдайды қарастырамыз, жүйедегі теңдеулер саны белгісіздер санымен тең емес және
$r(A)=r(\overline{A})<n$.

Онда біз былай жаза аламыз

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5)$$

(5)-тен шығатыны, соңғы $m-r$ теңдеуді алғашқы r теңдеудің сызықтық комбинациясы ретінде жаза аламыз. Соңғы $m-r$ теңдеуді жүйеден алып тастап, ал қалған теңдеулердегі $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ белгісіздерін теңдіктің оң жағына шығара отырып, (2) жүйеге эквивалентті теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{r,n}x_n \end{cases} \qquad (6)$$

мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_r$ айнымалылары базистік айнымалылар деп аталады, ал $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ айнымалылары еркін айнымалылар деп аталады. (5)-тен, егер $x_1, x_2, \dots, x_r$ айнымалыларын ғана белгісіздер деп алатын болсақ, онда (6) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар екендігі шығады және $x_1, x_2, \dots, x_r$ белгісіздерін еркін белгісіздер арқылы өрнектей аламыз. (6) жүйесінің шешімін, яғни базистік айнымалылардың еркін айнымалылар арқылы өрнектелуін (1) жүйесінің жалпы шешімі деп атаймыз.

Біртектес сызықтық теңдеулер жүйесі

Мынадай сызықтық теңдеулер жүйесін қарастыралық

$$AX=0 \qquad (7)$$

(7) теңдеулер жүйесі үнемі үйлесімді болатыны анық, себебі оның тривиалды шешімі $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ бар. Салдар 1-ден (7) теңдеулер жүйесінің нөлге тең емес шешімдері болуы үшін, $r(A)<n$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті екендігі шығады.